*La geometria possiede due grandi tesori: uno è il teorema di Pitagora;*

*l’altro la divisione di una linea secondo il rapporto estremo e medio.*

*Possiamo paragonare il primo a una certa quantità d’oro, e definire*

 *il secondo una pietra preziosa.*

 Keplero (1571-1630)

**La sezione aurea.**

La prima chiara definizione del rapporto che sarebbe stato chiamato aureo fu formulata circa tre secoli prima di Cristo, dal fondatore della geometria in quanto sistema deduttivo: Euclide.

Ecco cosa scrisse: «Si può dire che una linea retta sia stata divisa secondo la proporzione estrema e media quando l'intera linea sia alla parte maggiore così come la maggiore sta alla minore. » In altre parole: se il rapporto tra AC e CB è uguale a quello tra AB e AC, cioè

$$\frac{AC}{CB}=\frac{AB}{AC}$$

si può dire che la linea è stata divisa secondo la «proporzio­ne estrema e media», ovvero secondo il suo rapporto aureo. Il valore esatto del rapporto aureo è

$φ=\frac{AC}{CB}$ = 1,6180339887...

con infinite cifre decimali prive di sequenze ripetitive; un numero «interminabile» che ha incuriosito gli uomini fin dall’antichità.

Ma facciamo un piccolissimo passo indietro e torniamo al tempo di Platone, vissuto tra il 400 e il 300 a.C. Platone riteneva che il bagaglio culturale raccomanda­to a chi aspirava al governo della cosa pubblica dovesse includere l'aritmetica, la geometria piana e solida, l’astronomia e la musica. Non a caso l’ingresso dell’Accademia (la scuola filosofica da lui fondata ad Atene) era sovrastato dal monito: «Non varchi questa soglia chi ignora la geome­tria», primo esempio conosciuto nella storia di numero chiuso universitario. Per Platone, il sapere autentico non riguarda i complessi fenomeni che cogliamo coi sensi, ma le soggiacenti rego­larità, l’unica realtà a possedere un’autentica permanenza. Si tratta di un'intuizione di eccezionale attualità, in accor­do con la prospettiva della moderna scienza della natura, che non sarebbe possibile se le leggi che governano i fenomeni non fossero sempre e ovunque le stesse. Platone deve essere conside­rato uno dei primi difensori del «pensiero astratto» come oggi lo intendiamo.

Nel Timeo, Platone affronta l'immensa questione delle origini e il funzionamento del cosmo. In tale contesto egli avanza l’ipotesi che la struttura della materia si fondi sui cinque solidi regolari contraddistinti dalle seguenti proprietà: sono gli unici soli­di le cui facce sono tutte equilatere e uguali tra loro; ciascun solido è circoscritto da una sfera, in modo che tutti i suoi vertici si trovino sulla superficie di quest'ultima. I solidi platonici sono: il tetraedro, con quattro facce triangolari; il cubo, con sei facce quadrate; l’ottaedro, con otto facce triangolari; il dodecaedro, con dodici facce pentagonali; e l’icosaedro, con venti facce triangolari.

Platone fuse la teoria di Empedocle secondo cui i quattro elementi fondamentali della materia fossero la terra, l’acqua, l’aria e il fuoco, con la concezione di Democrito di Abdera (secondo il quale le componenti ultime dell’universo erano il vuoto e alcune particelle materiali non ulteriormente divisibili dette *atomi*) giungendo a una teoria unificata, in cui ciascu­no dei quattro elementi corrispondeva a un tipo diverso di particella fondamentale, rappresentata da uno dei solidi regolari. Sebbene, compren­sibilmente, i dettagli siano piuttosto diversi, l’idea fondamentale non è poi così lontana dalla formulazione della chi­mica moderna proposta da John Dalton nel XIX secolo. Per Platone l'elemento terra è legato allo stabile cubo, il fuoco, che «fa breccia», al puntuto e semplice tetraedro, l’aria alla «mobile» forma dell’ottaedro e l’acqua allo sfaccettato icosaedro. Il quinto solido, il dodecaedro, fu collegato da Platone all’universo nel suo insieme; o, per usare le sue parole, il dodecaedro sarebbe la forma «usata dalla divinità per ricamare le costellazioni sull'insieme dei cieli». L'assenza di un elemento associato al dodecaedro non fu accettata da tutti i seguaci di Platone, alcuni dei quali supposero l’esistenza di una quinta sostanza fondamentale. Aristotele introdusse l'etere quale elemento costitutivo dei corpi celesti, ma presente nell’uni­verso in qualità di *quinta essenza* cosmica. Pervadendo ogni altra materia, la quinta essenza permetteva il verificarsi del movimento e di ogni altro cambiamento in armo­nia con le leggi naturali. L'idea di una sostanza presente ovunque e con la stessa estensione dello spazio resistette fino al 1887 sotto forma di substrato materiale della propa­gazione delle onde luminose, quando il famoso esperimen­to di Michelson-Morley, dimostrò la sua inesi­stenza.

Il rapporto aureo occupa una posizione importante nelle dimensioni e nella simmetria di alcuni poliedri pla­tonici. In particolare, un dodecaedro con lato unitario ha una superficie complessiva la cui area è pari a$15 φ \sqrt{3-φ}$ , e un volume pari a $\frac{5φ^{3}}{6-2φ } $ In modo simile, un icosaedro di laro unitario ha un volume uguale a $\frac{5φ^{5}}{6}$.

La simmetria dei poliedri platonici si manifesta con altre curiose proprietà. Per esempio, il cubo e l'ottaedro hanno lo stesso numero di spigoli (dodici), ma il numero di facce e di vertici risulta invertito (il cubo ha sei fecce e otto vertici, l’ottae­dro otto facce e sci vertici). Lo stesso accade col dodecaedro e l'icosaedro: entrambi hanno tren­ta spigoli, ma il dodecaedro ha dodici facce e venti vertici, men­tre il contrario si verifica nell’ico­saedro. Queste somigliarne e simmetrie dei solidi platonici permettono interessanti riproduzioni di un poliedro nel suo «reciproco». Congiungendo i centri di tutte le facce di un cubo si ottiene un, così come congiungendo i centri di tutte le fac­ce di un ottaedro si ottiene un cubo. Lo stesso procedimento si può usare per riprodurre un icosaedro in un dodecaedro, e viceversa, e il rapporto delle lunghezze degli spigoli dei due solidi (quello esterno e quello riprodotto) e dato da una for­mula contenente, ancora una volta, il rapporto aureo $\frac{φ^{2}}{\sqrt{5}}$ .

Il tetraedro è auto-riproducibile: congiungendo i centri delle tacce di un tetraedro si ottiene un altro tetraedro.

Anche se non tutte le proprietà dei poliedri platonici erano note nell’antichità, né a Platone né ai suoi allievi sfuggì la loro straordinaria bellezza.

Come ho già accennato, l’icosaedro e il dodecaedro hanno col rapporto aureo legami particolarmente stretti, da diversi punti di vista. Per esempio, i dodici vertici di un icosaedro si possono dividere in tre gruppi di quattro, e i vertici di ciascuna tetrade risultano collocati in cima agli angoli di un rettangolo aureo (un rettangolo in cui il rap­porto tra lunghezza e larghezza è un rapporto aureo). I tre rettangoli corrispondenti alle tre tetradi sono reciproca­mente perpendicolari, e il solo punto comune a tutti e tre è il centro dell'icosaedro. Allo stesso modo, i centri delle dodici facce pentagonali del dodecaedro si possono raggruppare quattro a quattro, e ciascuno di questi gruppi corrisponde ai vertici di un rettangolo aureo.

Lo stretto legame di con alcune figure piane, come il pentagono e il pentagramma, e alcuni solidi, come i poliedri platonici, porta inevitabil­mente alla conclusione che con ogni probabilità l'interesse degli antichi greci per il rapporto aureo sia scaturito dai tentativi di costruire quel­le figure piane e quei solidi. La maggior parte dei tentativi in questione si è verificata intorno all'inizio del IV secolo a.C., ma si è affermato da più parti che $φ$ sarebbe incorpo­rato nel progetto architettonico del Partenone, costruito tra il 447 e il 432 a.C., sotto il governo di Pericle. È possi­bile controllare tali affermazioni? Il tempio chiamato Partenone dedicato ad Athena Parthenos (Atena Vergine) fu innal­zato sull'acropoli della città. La realiz­zazione dell'edificio fu affidata agli architetti Ictino e Callicrate, quella delle decorazioni scultoree a Fidia e ai suoi assistenti e allievi. Nonostante l’ingannevole semplicità dell'aspetto comples­sivo, il Partenone resta una delle più splendide espressioni degli ideali architettonici di chiarezza e unità. Ora in molti sostengono che la sua larghezza e altezza, quando i frontoni erano intatti, corrispon­devano esattamente a quelle di un rettangolo aureo, affer­mazione spesso completata da una riproduzione della parte frontale dell’edificio inscritta in un rettangolo; è anche stato ipotizzato che altre dimensioni del tempio abbiano fra loro un rapporto pari a $φ$. In conclusione, il rapporto aureo è stato usato o no per progettare il Partenone? È difficile esserne sicuri. Anche se la maggior parte dei teoremi matematici riguardanti il rapporto aureo (o la «proporzione estrema e media») sembrano essere stati formulati in anni successivi alla sua costru­zione, i pitagorici già da un certo tempo possedevano notevoli conoscenze al riguardo. Perciò, gli architetti possono aver deciso di basare il progetto del tempio su princìpi estetici diffusi in certi ambienti, e legati all’idea del rappor­to aureo.

Sia o non sia il Partenone configurato secondo il rapporto aureo, è indubbio che gli studi sull’argomento verosimilmente inaugurati dai greci del IV secolo a.C. ebbero il loro coronamento nella pubblicazione degli Elementi di Euclide, nel 300 a.C.

Nel 330 a.C. circa, il giovane Alessandro di Macedonia «il Grande», asceso al trono dopo una serie di brillanti vittorie militari del l’impero persiano (conquistò quasi tutta l’Asia Minore, la Siria, l'Egitto e Babilonia), fondò una città che sarebbe diventata il più grande monu­mento al suo nome: Alessandria, sul delta del Nilo. Alessandria sorgeva presso il crocevia delle comunicazioni terrestri e marittime utilizzate da tre civiltà di prima grandezza: quella egizia, quella greca e quella ebraica, di conseguenza, diventò rapidamente uno dei centri intellettuali più vivaci del mondo. Dopo la morte di Alessandro, Tolomeo I fondò ad Alessandria un centro d’insegnamento di livello equivalente a quello di un’università (nota come il «Museo»)., famoso anche per la sua biblioteca. Del primo corpo docente della scuola fece parte Euclide, autore del più celebre trattato di storia della matematica, gli *Elementi* (*Stoichia).* Il rapporto aureo è più volte nominato e discusso negli elementi, dove troviamo la prima chiara definizione di questo rapporto. Ce abbiamo già visto.

Qual è il nesso tra queste proporzioni e il pentagono?

In ogni figura piana regolare la somma di tutti gli angoli interni è uguale 180° x (n - 2), dove n è il numero di lati. Per esempio, in un triangolo la somma degli angoli è 180°. In un pentagono n = 5, e la somma degli angoli è 540°. Immaginiamo ora di tracciare nel pentagono due diagonali adiacenti ricavando tre angoli isosceli. E’ semplice dimostrare che gli angoli alla base dei due triangoli laterali congruenti tra loro sono uguali a 36°. Pertanto, otteniamo per gli angoli del triangolo centrale i valori di 36°, 72° e 72°. Bisecando uno dei due angoli di 72°, otteniamo un triangolo più piccolo *DBC* con gli stessi angoli del triangolo maggiore ADB. Con l’aiuto di un po’ di geometria elementare, si può dimostrare che in accordo con la defi­nizione di Euclide, il punto C divide la linea AB esatta­mente secondo il rapporto aureo, e che il rapporto di AD con DB è uguale al rapporto: in altre parole, in un pentagono regolare il rapporto tra la diagonale e il lato è pari a $φ. $

Il triangolo al centro, con un rapporto del laro con la base pari a$ φ, $è noto *come triangolo aureo*, mentre i due triango­li laterali, con un rapporto del lato con la base pari a $\frac{1}{φ} $sono talvolra chiamati *gnomoni aurei*: entrambi possono essere scomposti in trian­goli più piccoli, che sono a loro volta triangoli aurei e gnomoni aurei.

Il legame del rapporto aureo col pentagono, la simme­tria quintupla e i poliedri platonici sono interessanti di per sé, e furono più che sufficienti a destare la curiosità degli antichi greci. La predilezione dei pitagorici per pentagoni e pentagrammi, sommandosi all’interesse di Platone per i solidi regolari e alla Mia teoria che questi rappresentassero i princìpi della struttura materiale del cosmo, spinsero generazioni di matematici a prodigare tempo e fatica ai teoremi riguardano il rapporto aureo. Ma esso non avrebbe raggiunto il prestigio e l'aura quasi mistica da cui infine è stato circondato senza l’aiuto di alcune ulteriori proprietà algebriche. Ma per comprendere tali proprietà, è necessario determinare il preciso valore di $φ.$

Niente ci vieta di scegliere per unirà di misura della lunghezza il segmento più breve, CB. La lunghezza del segmento maggiore. AC, sarà quindi x volte CB, dove x è un fattore sconosciuto. Dire che la nostra linea è divisa secondo la proporzione estrema e media equivale, per definizione, ad affermare che x sta a 1 come x + l (la lunghezza di AB) sta a x. E’ facile risolvere rispetto a x la corrispondente uguaglianza:

$$\frac{x}{1}=\frac{x+1}{x}$$

Infatti, con semplici trasformazioni , si ottiene la semplice equazione di secondo grado:

$$x^{2}-x-1=0$$

La soluzione di questa equazione è il rapporto aureo:

$φ=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=$ 1,6180339887

È facile, a questo punto, constatare che $φ$ è irrazionale, essendo semplicemente la metà della somma di 1 e della radice quadrata di 5. Prima ancora di procedere, potete convincervi del latto che questo numero ha davvero delle proprietà singolari utiliz­zando una semplice calcolatrice tascabile. Digitate 1.6180339887... e premete il tasto per elevare al quadrato. Non notare niente di singolare? Ora digitate la stes­sa sequenza di cifre, e premete il pulsante della divisione (1/x). Curioso, vero? Il quadrato di 1,6180339887... è

2.6180339887..., mentre il suo reciproco è 0,6180339887... Le cifre dopo il punto decimale sono esattamente le stesse! Il rapporto aureo, ed esso solo, ha la caratteristica di avere un quadrato uguale a se stesso più uno, e un reciproco uguale a se stesso meno uno.

Dalle espressioni illimitate rivolgiamo ora la nostra atten­zione al rettangolo aureo. Il lato maggiore e il minore stanno tra loro in un rapporto pari a $φ$. Immagi­niamo di sottrarre da questo rettangolo un quadrato di lato uguale al lato minore. Il risultato sarà un piccolo rettangolo, che è a sua volta un rettangolo aureo. Le dimensioni del rettangolo figlio sono minori di quelle del rettangolo genitore di un fattore pari a $φ.$ Togliendo un quadrato dal rettangolo figlio con lo stesso procedimento, otteniamo un terzo rettangolo aureo di nuovo rimpicciolito di un fattore pari a $φ.$ Proseguendo si genera una serie di rettangoli aurei sempre più piccoli, di dimensioni ridotte, ogni volta, di un fattore uguale a $φ$. Esaminando ciascun rettangolo con una lente di ingrandimen­to, che elimina la differenza di grandezza, si constata che sono identici. Quello aureo è l'unico rettangolo che consen­te, togliendo un quadrato dalla sua area, di ottenere un ret­tangolo simile al primo. Tracciando due diagonali che si intersecano in ciascuna coppia di rettangoli, genitore e figlio, si trova che tutte le diagonali passano per un punto. Si può dire che una *serie* geometrica di rettangoli aurei sem­pre più piccoli *converga* intorno a quel punto senza mai raggiungerlo.

Passarono gli anni e all’età dell’oro della matematica greca (300-200 a.C.) sopravvenne poi un periodo detto età oscura. Ad Alessandria, la grandiosa biblioteca andò distrutta in seguito a varie campagne militari, dapprima romane, poi cristiane e infine islamiche. Perfino l’Accademia fondata da Platone cessò ogni attività dal 529 d.C., quando l’imperatore bizantino Giustiniano ordinò la chiusura di tutte le scuole greche. L'ultimo dei grandi studiosi di geometria greci che con­tribuirono anche allo studio del rapporto aureo tu Pappo di Alessandria, vissuto nel IV secolo d.C. Con l’ascesa dell'IsIam, gli studi matematici cominciarono a essere coltivati in tutto il mondo musulmano. Fu proprio grazie allo sviluppo dell'IsIam nell’VIII secolo che gran parte della matematica antica fu preservata. Molto importante, a questo riguardo, fu l'istituzione a Baghdad della «Beit al-hikma» (Casa della Sapienza) per decisione del califfo al-Mamun (786-833 ). Il funzionamento della Casa si ispirava a quello della celebre «università» di Alessandria, il Museo, e in effetti l'impero abbaside incorporò tutto il super­stite sapere alessandrino.

Molti dei più importanti contributi islamici furono di natura algebrica, e riguardano solo di sfuggita il rapporto aureo. Ciò nonostante, sono da menzionare le opere di almeno tre matematici: al-Khwarizmi e Abu Kamil Shuja nel IX secolo; e Abu'l-Wafa nel X secolo.

Mobammed ibn-Musa al-Khwarizmi compose a Baghdad (verso l’anno 825) quello che è considerato il più influen­te trattato di algebra di quel tempo - il Kitàb al-jabr wa al-muqabada (la Scienza del ristabilimento e della compa­razione). Proprio dalla seconda parola del titolo (al-jabr) deriva il sostantivo algebra che usiamo ancor oggi, pro­babilmente perché l’opera di al- Khwarizmi fu la prima a diffondersi in Europa su tale argomento. Anche il sostan­tivo «algoritmo», che in matematica designa qualunque procedimento per risolvere un problema tramite una serie finita di passi precisi, e una storpiatura del nome di al-Khwarizmi. Per duecento anni, la Scienza del ristabilimento fu sinonimo di «teoria delle equazioni». Ebbene, l’equazione risolutiva di uno dei problemi descritti dall'autore ha una stretta somiglianza con quella che dà l’esatto valore del rapporto aureo. Cediamogli la parola: «Ho divi­so dieci in due parti; una l'ho moltiplicata per dieci, l’altra per se stessa, e i prodotti erano uguali». Per riferirsi all'in­cognita, al-Khwarizmi usa il sostantivo shai, «cosa». Perciò, la prima riga della descrizione dell'equazione (relativa all'an­zidetto problema) può essere tradotta così: «Moltiplicate dieci per la cosa; il risultato è dieci cose». In formula: lOx = ( 10 - x): Ebbene, questa formula corrisponde al segmen­to minore di una linea di lunghezza 10 divisa secondo il rapporto aureo. Se al- Khwarizmi abbia pensato a questo rapporto nel formulare il problema è oggetto di controver­sia. Comunque, furono la notorietà e il prestigio dei suoi libri a far sì che l’incognita fosse chiamata res in latino, «cosa». E l'algebra stessa si diffuse dapprima cui nome di «arte della cosa», benché talvolta fosse anche chiamata *ars* magna, cioè grande arte, per distinguerla dall’arte più facile, ma meno potente, dell'aritmetica.

Più importante per la storia del rapporto aureo è il fatto che alcune delle opere di Abu Kamil sembrano essere state il punto di partenza dei libri del matematico Leonardo da Pisa, o Fibonacci, vissuto tra il XII e il XIII secolo.

«*Le nove cifre indiane sono: 9 8 7 6 5 43 2 1. Con queste nove cifre, e col segno 0... si può scrivere qualunque numero, come dimostrato qui di séguito.* »

Così inizia la prima e più celebre opera di Leonardo da Pisa, detto anche Fibonacci: il Liber abaci (Libro dell'abaco) pubblicato nel 1202. All'epoca della sua apparizione, solo i pochi privilegiati intellettuali europei che avevano potuto consultare le traduzioni dei trat­tati di al-Khwarizmi e Abu Kamil conoscevano l'esistenza delle cifre indo-arabe oggi usate in tutto il mondo. Fibonacci, che per qualche tempo soggiornò insieme a suo padre, un funzionano delle dogane, nella città araba di Bugia ( nell’odierna Algeria), e in seguito visitò altri paesi del Mediterraneo (tra i quali la Grecia, l'Egitto e la Siria), ebbe la possibilità di studiare e confrontare diversi sistemi di numerazione e di esecuzione delle operazioni aritmetiche. Giunto alla conclusione che le cifre indo-arabe, basate sul principio del valore dipendente dalla posizione nel numero, erano largamente superiori a tutti gli altri metodi, Fibonacci dedicò i primi sette capitoli del suo libro alla spiegazione della notazione indo-araba e ai vari usi pratici dei quali era suscettibile. La Pisa del XII secolo era un porto molto prospero e attivo, e un nodo di traffici sia terrestri che marittimi. Spezie dell'Estremo Oriente transitavano per il comune toscano durante il tra­gitto verso il Nord Europa, aggiungendosi al vino, all'olio e al sale giunti da diverse parti dell’Italia peninsulare, della Sicilia e della Sardegna. La florida industria pisana dei pel­lami importava materia prima dall'Africa settentrionale, per poi utilizzarla nelle tante concerie situate presso il litorale. Ma la citta toscana andava fiera anche dell’eccellenza della propria industria metallurgica dei propri cantieri navali. É chiaro che tanto tenore di attività economiche implicasse una contabilità altrettan­to alacre. E non è così difficile immaginare Leo­nardo intento a osservare gli scrivani che annotavano serie interminabili di numeri romani, e li sommavano e sottrae­vano con l’abaco. Orbene, tenere i conti con il sistema romano era il contrario della comodità e per far fronte a ciò gli europei del Medioevo rimediavano soprattutto utilizzando l'abaco, un sistema fatto da una serie di palline forate che scorrevano su fili paralleli. In un certo senso, la pluralità dei fili faceva le veci della notazione posizionale: un tipico abaco aveva quattro fili: quello in bosso per le unità, il successivo per le decine, il terzo per le centinaia e l'ultimo per le migliaia. A Bugia Fibonacci prese confidenza con l’«arte delle nove cifre indiane e decise di scrivere un libro che diffondesse tra i contabili e i commercianti l’uso dei simboli numerici indo-arabi.

Molti studenti di matematica, di materie scientifiche e di belle arti, hanno sentito nominare Fibonacci solo in virtù del seguente problema tratto dal dodicesimo capitolo del *Liber abaci*: «*Un uomo mise una copia di conigli in un luogo circondato da tutti il lati da un muro. Quante coppie di conigli possono essere prodotte dalla coppia iniziale in un anno supponendo che ogni mese ogni coppia produca una nuova coppia in grado di riprodursi a sua volta dal secondo mese?* » Per risolvere il problema basta un po’ di buon senso. Si inizia con una coppia. Dopo il primo mese, la prima coppia dà origine a un'altra coppia, per cui ne abbiamo due. Poi, in ogni mese a partire dal terzo il numero delle coppie è semplicemente uguale alla somma del numero di coppe nei due mesi precedenti. La successione ricorsiva 1, 1,2,3,5,8,13,21, 34, 55. 89, 144, 233,... in cui in cui ciascun temine è uguale alla somma dei due termini precedenti è stata giustamente chiamata «di Fibonacci». La ragione della fama attuale di Leonardo Fibonacci è che la successione che porta il suo nome è ben lontana dal trovare applicazione nell’allevamento dei conigli, al contrario è un qualcosa che incontreremo in un’incredibile varietà di fenomeni apparentemente non collegati tra loro.

Rivolgiamo l'attenzione ai rappoti degli elementi contigui (qui riportati tino al sesto decimale):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1/1 | = | 1,000000 |
| 2/1 | = | 2,000000 |
| 3/2 | = | 1,500000 |
| 5/3 | = | 1,666666 |
| 8/5 | = | 1,600000 |
| 13/8 | = | 1,625000 |
| 21/13 | = | 1,615385 |
| 34/21 | = | 1,619048 |
| 55/34 | = | 1,617647 |
| 89/55 | = | 1,618182 |
| 144/89 | = | 1,617978 |
| 233/1444 | = | 1,618056 |

La riconoscete? Procedendo lungo la successione di Fibonacci, il rapporto tra un termine e il suo precedente oscilla (risultando ora in eccesso, ora in difetto) intorno a un numero al quale si avvicina sempre di più; e quel numero è $φ,$ il rapporto aureo.