Grupo 7: Cruz, M.;Cuellar, P.;González, C.;Grágeda, A., Lores, G., Santapaola, J.

Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

1.- Definiciones

En las actividades de la vida real, existen sistemas en los que se producen múltiples comportamientos los cuales pueden ser representados por ecuaciones formadas por variables y constantes del sistema. Para conocer la conducta del sistema frente a una variación, es necesario resolver simultáneamente todas estas ecuaciones que geométricamente representan rectas, planos, superficies, etc. Resolver un sistema equivale a encontrar los valores que satisfacen todas las ecuaciones del sistema. En este curso se trabajará con dos ecuaciones lineales de dos incógnitas.

En un cuerpo K, se llama sistema de 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas, a un conjunto de ecuaciones de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 = b_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 = b_2 \end{cases}$$

Donde todos los a_{ij} y b_i pertenecen al cuerpo K: El sistema es lineal debido a que ninguna de las incógnitas está elevada a una potencia superior a uno (1).

Se han colocado dos subíndices a los coeficientes de cada una de las incógnitas para que queden perfectamente localizados. El primer subíndice remite a la ecuación a la que pertenece, mientras que el segundo subíndice refiere a la incógnita de la cual es coeficiente.

Notación simbólica: en el sistema de ecuaciones los:

a_{ij} son números reales, llamados coeficientes del sistema (i= 1, 2, ; m; j= 1, 2)

b_i son números reales, llamados términos independientes del sistema

x_j son las variables del sistema, las incógnitas

Notación matricial de un sistema de ecuaciones lineales

A partir del sistema dado se pueden obtener matrices que serán de utilidad cuando se realice el análisis y clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales. Se verifica que:

$$A \,.\, X = B$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Donde:

Matriz del sistema o matriz de los coeficientes (A) es la matriz de dimensión m×n formada por los coeficientes del sistema.

Matriz de las incógnitas (X) es la matriz columna formada por las incógnitas.

Matriz de los términos independientes (B) es la matriz columna formada por los términos independientes.

Matriz ampliada (A´) es la matriz que se obtiene al añadir a la matriz del sistema la columna de los términos independientes.

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ & & \dots \end{pmatrix}$$

El sistema puede ser:

Analizado: para saber si tiene o no solución

Resuelto: para encontrar la solución, si la tiene.

Solución de un sistema de ecuaciones lineales: Resolver un sistema de ecuaciones lineales significa encontrar los valores de las n incógnitas que satisfacen simultáneamente cada una de las m ecuaciones del sistema.

Sistemas equivalentes: Dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes si y solo si tienen el mismo conjunto solución.

Sistemas homogéneos: Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas es homogéneo si las m ecuaciones son homogéneas. Una ecuación es homogénea si su término independiente es nulo.

2.- Clasificación

Según sus soluciones los sistemas se clasifican en:

- Compatibles
  - Determinados (Tienen una única solución)
  - Indeterminados (Tienen infinitas soluciones)
- Incompatibles (No tienen solución)

Según sus términos independientes:

- Homogenéos (Sus términos independientes son nulos)
- No homogéneos (No todos sus términos independientes son nulos)

3.- Análisis de un sistema de ecuaciones lineales

Análisis del sistema por el método de Leibniz - Cramer - determinantes

Se realiza el análisis para un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\begin{cases} a_{11}\,x + a_{12}\,y = b_1 \\ a_{21}\,x + a_{22}\,y = b_2 \end{cases}$$

Llamamos:

Δ al determinante de la matriz del sistema formado por los coeficientes de las incógnitas,

Δ_x al determinante que se obtiene al sustituir la primera columna correspondiente a la incógnita que se está buscando por los términos independientes y

Δ_y al determinante que se obtiene al sustituir la segunda columna correspondiente a la incógnita que se está buscando por los términos independientes.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \,.\, a_{12} - a_{21} \,.\, a_{22}$$

Si $\Delta \neq 0$, el sistema es compatible y podemos calcular los valores de x e y con los determinantes definidos anteriormente:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\Delta} \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

En un sistema de ecuaciones lineales siempre tenemos solo uno de los tres casos siguientes:

$$\text{Si } \Delta \neq \mathbf{0} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{El sistema se denomina compatible determinado,} \\ \text{tiene una única solución} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{c} \text{Si } \Delta = \mathbf{0} \\ \text{y} \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} \begin{array}{l} \Delta_x = \mathbf{0} \\ \Delta_y = \mathbf{0} \end{array} & \begin{array}{l} \text{El sistema se denomina compatible indeterminado,} \\ \text{tiene infinitas soluciones} \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} \Delta_x \neq \mathbf{0} \\ \Delta_y \neq \mathbf{0} \end{array} & \begin{array}{l} \text{El sistema se denomina incompatible,} \\ \text{no tiene solución. Ninguna solución de una} \\ \text{de las ecuaciones puede serlo de la otra.} \end{array} \end{array} \right.$$

4.- Resolución

Para resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas existen básicamente cinco métodos:

4.1.- Método de sustitución: Consiste en despejar una variable de una de las incógnitas y reemplazarla en la otra ecuación.

4.2- Método de igualación: Consiste en despejar la misma variable de ambas ecuaciones e igualar.

4.3- Método de sumas y restas: Consiste en eliminar una de las incógnitas por operaciones elementales de sumas y restas.

4.4- Método de determinantes: Es aplicable si el sistema tiene igual número de ecuaciones que de incógnitas m = n y n es igual a dos o tres ya que no se puede aplicar la regla de Cramer a determinantes de orden superior. El valor de cada incógnita xi se obtiene de un cociente cuyo denominador es el determinante de la matriz de coeficientes, y cuyo numerador es el determinante que se obtiene al cambiar la columna i del determinante anterior correspondiente a la incógnita que se está buscando, por la columna de los términos independientes.

4.5- Método gráfico: Consiste en encontrar la intersección entre las rectas que representa cada ecuación, dicha intersección puede ser:

a) **Un punto**, la solución es única, sistema compatible determinado (las rectas se cortan en un único punto).

b**) Infinitos puntos**, existen infinitas soluciones, sistema compatible indeterminado (las rectas son coincidentes).

c) **No existe intersección**, el sistema no tiene solución, sistema incompatible (las rectas son paralelas).

5.- Ejemplo del método de Cramer (por determinantes)

$$\begin{cases} -3x + 5y = 1 \\ 2x - 4y = 4 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = (-3 \,.\, (-4)) - (2 \,.\, 5) = 2$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-24}{2} = -12$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-14}{2} = -7$$

Solución:
$S = \{(x, y) \in R^2 / x = -12, \; y = -7\}$

Sistema compatible determinado

Verificación:

$$-3\,(-12) + 5\,(-7) = 1$$

$$2\,(-12) - 4\,(-7) = 4$$