

## 2.2 Lausekkeen arvo tasoalueessa

Tässä osiossa tutkimme muotoa  $ax + by + c$  olevan lausekkeen suurinta ja pienintä arvoa tasoalueessa.

Soveltaen esim 1 s 64

Lausekkeen  $2y + x$  suurin ja pienin arvo  
kuvan tasoalueessa

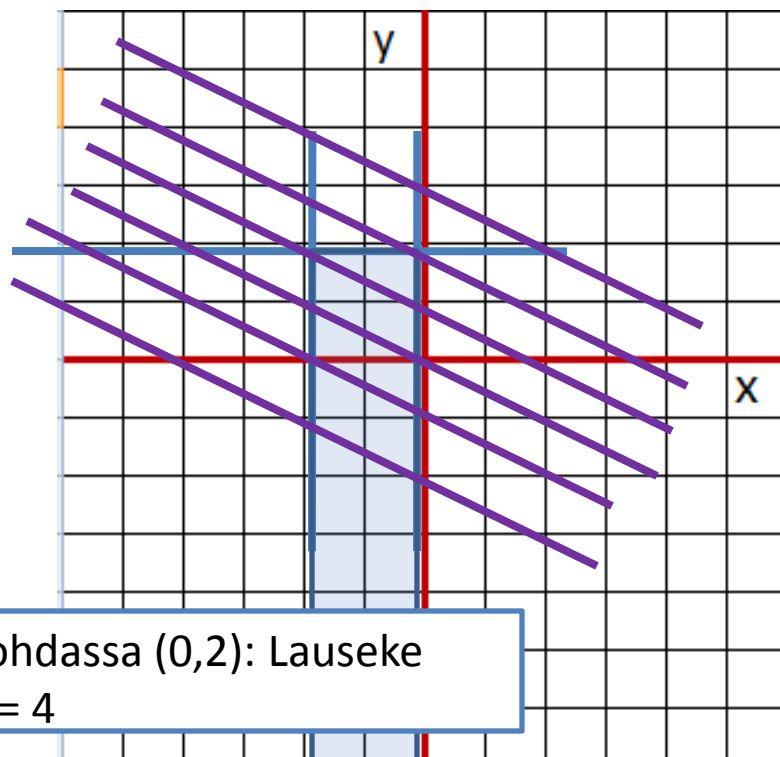
Ajatellaan, että suurin/pienin arvo on  $c$  eli  
 $2y + x = c$

Ratkaistaan yhtälö  $y$ :n suhteen

$$2y = -x + c \quad | : 2$$

$$y = -0,5x + 0,5c$$

Vakiotermin ja tutkittavan lausekkeen ( $2y+x$ ) saavat suurimman/pienimmän arvonsa samanaikaisesti.



Vakiotermin saa suurimman arvon **tasoalueella** kohdassa  $(0,2)$ : Lauseke  $2y+x$  saa samalla suurimman arvonsa:  $2 \cdot 2 + 0 = 4$

Pienintä arvoa vakiotermillä ei ole. Ei myöskään tutkittavalla lausekkeella.

# Tehtävät

Epäyhtälön ratkaisu s 69... [94](#), [95](#), [96a](#), [96b](#), [97](#), [98](#), [102](#), [103](#)

lisätehtävät s 160 [22a](#), [22b](#), [23](#)

94. Optimoitava lauseke saa suurimman ja pienimmän arvonsa tarkasteltavan monikulmion kärkipisteissä.

a)

Kärkipiste	Lausekkeen $3x + 5y$ arvo
$(0, 9)$	$3 \cdot 0 + 5 \cdot 9 = 45$
$(0, -1)$	$3 \cdot 0 + 5 \cdot (-1) = -5$
$(2, 3)$	$3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 21$

Vastaus: Pienin arvo -5, suurin arvo 45.

b)

Kärkipiste	Lausekkeen $3x + 5y$ arvo
$(0, 6)$	$3 \cdot 0 + 5 \cdot 6 = 30$
$(2, 4)$	$3 \cdot 2 + 5 \cdot 4 = 26$
$(2, 0)$	$3 \cdot 2 + 5 \cdot 0 = 6$
$(0, -2)$	$3 \cdot 0 + 5 \cdot (-2) = -10$

Vastaus: Pienin arvo -10, suurin arvo 30.

95. Optimoitava lauseke saa suurimman ja pienimmän arvonsa tarkasteltavan monikulmion kärkipisteissä.

a)

Kärkipiste	Lausekkeen $6x - 8y$ arvo
(0, 2)	$6 \cdot 0 - 8 \cdot 2 = -16$
(1, 4)	$6 \cdot 1 - 8 \cdot 4 = -26$
(2, 3)	$6 \cdot 2 - 8 \cdot 3 = -12$
(0, 1)	$6 \cdot 0 - 8 \cdot 1 = -8$

Vastaus: Pienin arvo -26, suurin arvo -8.

b)

Kärkipiste	Lausekkeen $6x - 8y$ arvo
(0, 10)	$6 \cdot 0 - 8 \cdot 10 = -80$
(4, 6)	$6 \cdot 4 - 8 \cdot 6 = -24$
(2, 0)	$6 \cdot 2 - 8 \cdot 0 = 12$
(0, 0)	$6 \cdot 0 - 8 \cdot 0 = 0$

Vastaus: Pienin arvo -80, suurin arvo 12.

# Teht 96a

96. Tutkitaan suorien  $2x + 5y = c$  joukkoa.

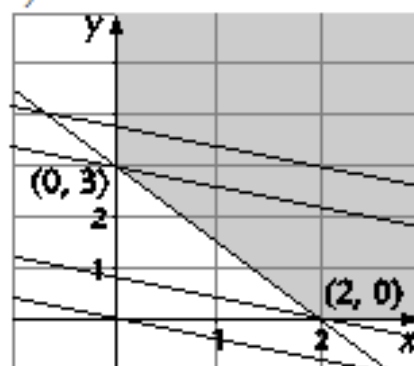
Kaikki tällaiset suorat ovat yhdensuuntaisia suoran  $2x + 5y = 0$  kanssa.

$$2x + 5y = 0$$

$$5y = -2x$$

$$y = -\frac{2}{5}x$$

a)

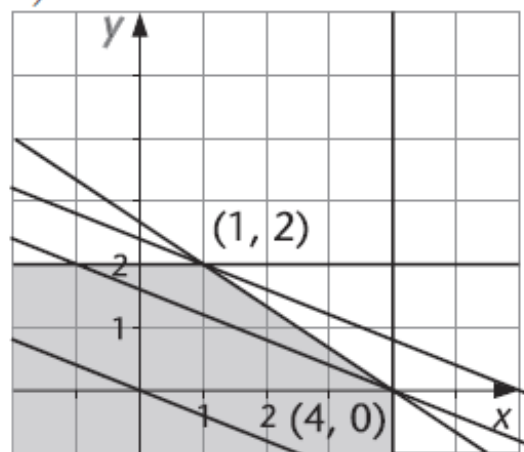


Pienin vakiotermin  $c$  arvo on suoralla, joka sivuaa tasoaluetta pisteessä  $(2, 0)$ . Lauseke saa tällöin arvon  $2x + 5y = 2 \cdot 2 + 5 \cdot 0 = 4$ .

Vakiotermi voi suurentua rajatta, joten lausekkeella ei ole suurinta arvoa.

# Teht 96b

b)



Suurin vakiotermin arvo on suoralla, joka sivuaa tasoaluetta pisteessä  $(1, 2)$ . Lauseke saa tällöin arvon  $2x + 5y = 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 12$ . Vakiotermi voi pienentyä rajatta, joten pienintä arvoa ei ole.

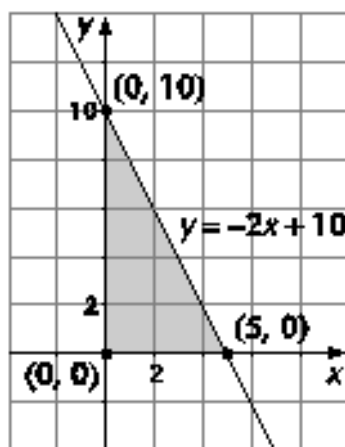
Vastaus:

- a) Pienin arvo 4, suurinta arvoa ei ole.
- b) Pienintä arvoa ei ole, suurin arvo 12.

97.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y + 2x \geq 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \geq -2x + 10 \end{cases}$$



Lasketaan muodostuneen monikulmion kärkipisteet A, B, C.

$$A = (0, 0)$$

$$B = (0, 10)$$

Nollakohta ( $y = -2x + 10$ ):

$$-2x + 10 = 0$$

$$-2x = -10 \quad | :(-2)$$

$$x = 5$$

Siis C = (5, 0)

Kärkipiste	Lausekkeen $-2x + 3y$ arvo
(0, 0)	$-2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$
(0, 10)	$-2 \cdot 0 + 3 \cdot 10 = 30$ suurin
(5, 0)	$-2 \cdot 5 + 3 \cdot 0 = -10$ pienin

Vastaus:

a) Suurin arvo saadaan pisteessä (0, 10) ja arvo on 30.

b) Pienin arvo saadaan pisteessä (5, 0) ja arvo on -10.

# Teht 97

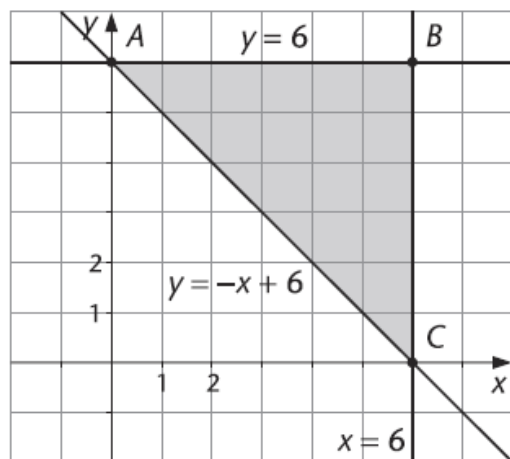
# teht98

98.

$$\begin{cases} y \leq 6 \\ y + x \geq 6 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq 6 \\ y \geq -x + 6 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

Piirretään tasoalue:



Lasketaan kärkipisteet A, B, C:

A: Suoran  $y = -x + 6$   $y$ -akselin leikkauskohta on  $y = 6$ .

$$A = (0, 6)$$

C: Suoran  $y = -x + 6$  nollakohta on  $x = 6$ .

$$C = (6, 0)$$

B: Suorien  $y = 6$  ja  $x = 6$  leikkauspiste

$$B = (6, 6)$$

Kärkipiste	Lausekkeen $x + 9y$ arvo
$(0, 0)$	$0 + 9 \cdot 6 = 54$
$(6, 0)$	$6 + 9 \cdot 0 = 6$ pienin
$(6, 6)$	$6 + 9 \cdot 6 = 60$ suurin

Vastaus: Suurin arvo 60, pienin arvo 6.

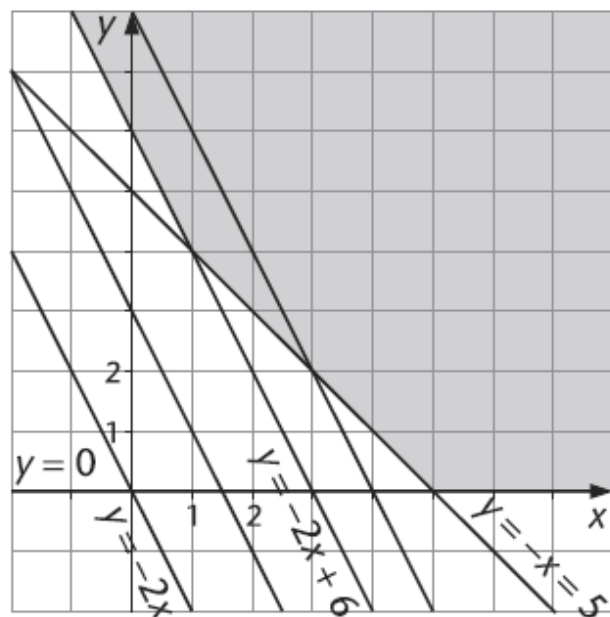


# teht102

102.

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y \geq -2x + 6 \\ y \geq -x + 5 \end{cases}$$

Piirretään tasoalue:



Tutkitaan suorien  $4x + 2y = c$  joukkoa.

Kaikki tällaiset suorat ovat yhdensuuntaisia suoran  $4x + 2y = 0$  kanssa.

$$2y = -4x \quad |:2$$

$$y = -2x$$

Piirretään suora koordinaatistoon.

Pienin vakiotermien  $c$  arvo on suoralla  $y = -2x + 6$ , joka sivuaa tasoaluetta pisteessä  $(0, 6)$ , jolloin lauseke

$$4x + 2y = 4 \cdot 0 + 2 \cdot 6 = 12.$$

Vakiotermi voi suurentua rajatta, joten suurinta arvoa ei siis ole.

Vastaus: Pienin arvo 12,  
suurinta arvoa ei ole.

103. a)

Kärkipiste	Lausekkeen $4x - 5y$ arvo
(0, 3)	$4 \cdot 0 - 5 \cdot 3 = -15$ pienin
(0, 0)	$4 \cdot 0 - 5 \cdot 0 = 0$
(4, 0)	$4 \cdot 4 - 5 \cdot 0 = 16$ suurin

b)

Kärkipiste	Lausekkeen $4x - 5y$ arvo
(2, 5)	$4 \cdot 2 - 5 \cdot 5 = -17$ pienin
(4, 2)	$4 \cdot 4 - 5 \cdot 2 = 6$
(3, 0)	$4 \cdot 3 - 5 \cdot 0 = 12$ suurin
(0, 0)	$4 \cdot 0 - 5 \cdot 0 = 0$
(0, 1)	$4 \cdot 0 - 5 \cdot 1 = -5$

Vastaus:

a) Suurin arvo 16, pienin arvo -15

b) Suurin arvo 12, pienin arvo -17

# Kert\_t22a

22. a) Suurin tai pienin arvo löytyy tarkasteltavan monikulmion kärkipisteissä.

1. kärkipiste (0, 0)

2. kärkipiste suoran  $y = -x + 4$   
 $y$ -akselin leikkaiskohta, (0, 4)

3. kärkipiste suoran  $y = -x + 4$  ja  
 $y = -5x + 6$  leikkauspiste:  
 $-x + 4 = -5x + 6$   
 $4x = 2 \quad | :4$   
 $x = \frac{1}{2} = 0,5$   
 $y = -0,5 + 4 = 3,5$   
Saadaan piste (0,5; 3,5).

4. kärkipiste

suoran  $y = -5x + 6$  nollakohta  
 $-5x + 6 = 0$

$$-5x = -6 \quad | :(-5)$$

$$x = \frac{6}{5} = 1,2$$

Saadaan piste (1,2; 0).

Kärkipiste	Lausekkeen $2x + y$ arvo
(0, 0)	$2 \cdot 0 + 0 = 0$ pienin
(0, 4)	$2 \cdot 0 + 4 = 4$
(0,5; 3,5)	$2 \cdot 0,5 + 3,5 = 4,5$ suurin
(1,2; 0)	$2 \cdot 1,2 + 0 = 2,4$

# Kert\_t22b

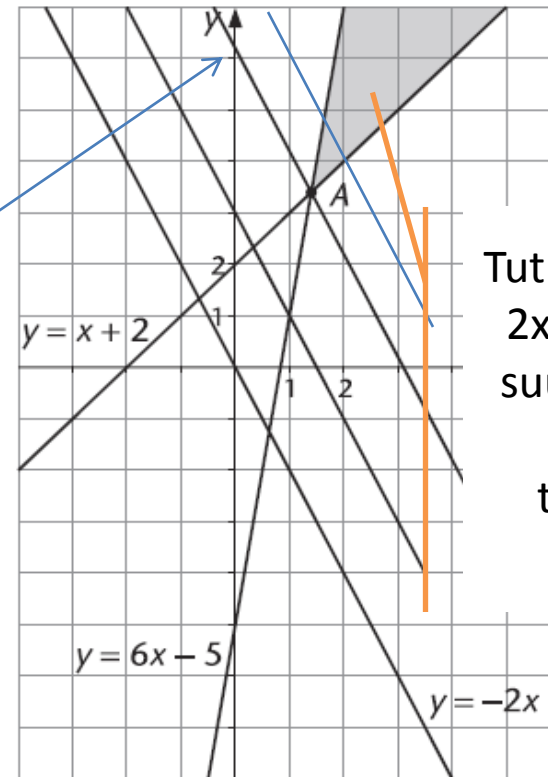
b) Suurin ja pienin arvo etsitään tutkimalla suorien  $2x + y = c$  joukkoa. Kaikki tällaiset suorat ovat yhdensuuntaisia origon kautta kulkevan suoran  $2x + y = 0$  kanssa ( $y = -2x$ ).

Pienin vakiotermi  $c$  arvo näyttäisi olevan suoralla, joka sivuaa tasoaluetta pisteessä A. Pienin  $y = x + 2$  ja  $y = 6x - 5$  leikkauspiste:  
 $x + 2 = 6x - 5$

$$-5x = -7 \quad | :(-5)$$

$$x = \frac{7}{5} = 1,4$$

Vertailussa mukana vain suorat, jotka kulkevat tummennetun alueen läpi tai sivuavat sitä.



Tutkitaan lausekkeen  $2x + y$  ja samalla  $c$ :n suurinta ja pienintä arvoa tummennetulla tasoalueella.

Kun  $x = 1,4$ , niin  $y = 1,4 + 2 = 3,4$ .  
Siis  $A = (1,4; 3,4)$

Lauseke  $2x + y$  saa tällöin arvon  $2 \cdot 1,4 + 3,4 = 6,2$ . Kaikki tämän suoran yläpuolella olevat kulkevat tasoalueen poikki. Vakiotermi voi siis suurentua rajatta eli suurinta arvoa ei ole.

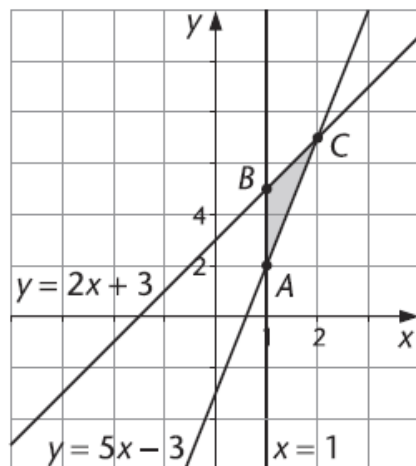
Suurinta arvoa ei ole, pienin arvo 6,2

# Kert\_t23

23.

$$\begin{cases} -5x + y \geq -3 \\ y \leq 2x + 3 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 5x - 3 \\ y \leq 2x + 3 \\ x \geq 1 \end{cases}$$



Huom.  
x- ja y-  
koordinaatit eri  
mittakaavassa.

Lasketaan muodostuneen monikulmion kärkipisteet.

A:

$$\begin{cases} y = 5x - 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Sijoitetaan  $x = 1$  yhtälöön  $y = 5x - 3$ .

$$y = 5 \cdot 1 - 3 = 2$$

Siis  $A = (1, 2)$ .

B:

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Sijoitetaan  $x = 1$  yhtälöön  $y = 2x + 3$ .

$$y = 2 \cdot 1 + 3 = 5$$

Siis  $B = (1, 5)$ .

C:

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = 5x - 3 \end{cases}$$

$$2x + 3 = 5x - 3$$

$$-3x = -6 \quad | :(-3)$$

$$x = 2$$

$$y = 2 \cdot 2 + 3 = 7$$

Siis  $C = (2, 7)$ .

Kärkipiste	Lausekkeen $-3x - 2,3y$ arvo
(1, 2)	$-3 \cdot 1 - 2,3 \cdot 2 = -7,6$ suurin
(1, 3)	$-3 \cdot 1 - 2,3 \cdot 3 = -9,9$
(2, 7)	$-3 \cdot 2 - 2,3 \cdot 7 = -22,1$ pienin