

1.4 yhtälöryhmän ratkaiseminen

Yhtälöryhmän ratkaisemisella tarkoitetaan esimerkiksi kolmen sellaisen muuttujan etsimistä, että ne toteuttavat kolme eri yhtälöä.

Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x - y - z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$$

- Valitaan ensin kaksi yhtälöparia, joista poistetaan eliminointimenetelmällä yksi tuntematon, esimerkiksi z .

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x - y - z = 3 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$$

- Muodostetaan sitten saaduista yhtälöistä yhtälöpari ja ratkaistaan se.

$$\begin{cases} 2x - 2y = 4 & |*(-1) \\ 3x - 2y = 5 \\ -2x + 2y = -4 \\ 3x - 2y = 5 \\ x = 1 \end{cases}$$

• y :n ja z :n arvot saadaan sijoittamalla:

$$2x - 2y = 4 \text{ eli } 2*1 - 2y = 4, \text{ josta } y = -1$$

$$x - y + z = 1 \text{ eli } 1 - (-1) + z = 1, \text{ josta } z = -1$$

Vastaus: $(1, -1, -1)$

Tehtävät

Kotitehtävät s 40...

[52a](#), [52b](#), [53a](#), [53b](#), [54](#), [61](#)

Lisätehtävät s 158...

[13a](#), [13b](#), [15](#), [16](#)

Tehtävä 15 vaatii itsenäistä lisäopiskelua s 43-46. Kysy neuvoa tarvittaessa.

52. a)

$$\begin{cases} 5a + b + 3c = 1 \\ 4a + 2b + c = 2 \\ -4a - 5b + 2c = 1 \end{cases}$$

Muodostetaan kaksi yhtälöparia ja eliminoidaan molemmista a .

$$\begin{array}{l} (1) \\ \begin{cases} 4a + 2b + c = 2 \\ -4a - 5b + 2c = 1 \end{cases} \\ \hline -3b + 3c = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (2) \\ \begin{cases} 5a + b + 3c = 1 & | \cdot (-4) \\ 4a + 2b + c = 2 & | \cdot 5 \end{cases} \\ \hline \begin{cases} -20a - 4b - 12c = -4 \\ 20a + 10b + 5c = 10 \end{cases} \\ \hline 6b - 7c = 6 \end{array}$$

Saadaan uusi yhtälöpari:

$$\begin{cases} -3b + 3c = 3 & | \cdot 2 \\ 6b - 7c = 6 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \begin{cases} -6b + 6c = 6 \\ 6b - 7c = 6 \end{cases} \\ \hline -c = 12 \\ c = -12 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Jos } c = -12, \text{ niin} \\ -3b + 3 \cdot (-12) = 3 \\ -3b - 36 = 3 \\ -3b = 39 \\ b = -13 \end{array}$$

Teht 52a

Sijoitetaan yhtälöön $4a + 2b + c = 2$
 $c = -12$ ja $b = -13$:

$$\begin{array}{l} 4a + 2 \cdot (-13) + (-12) = 2 \\ 4a - 26 - 12 = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4a = 40 & | :4 \\ a = 10 \end{array}$$

Vastaus: $a = 10$, $b = -13$, $c = -12$

Teht 52b

b)

$$\begin{cases} a + b + c = -5 \\ 9a - 3b + 5c = -49 \\ 4a - 2b + c = -20 \end{cases}$$

Muodostetaan kaksi yhtälöparia
eliminoidaan niistä c .

$$(1) \quad \begin{cases} a + b + c = -5 & | \cdot (-1) \\ 4a - 2b + c = -20 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -a - b - c = 5 \\ 4a - 2b + c = -20 \end{cases} \\ \hline 3a - 3b = -15 \end{array}$$

$$(2) \quad \begin{cases} a + b + c = -5 & | \cdot (-5) \\ 9a - 3b + 5c = -49 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -5a - 5b - 5c = 25 \\ 9a - 3b + 5c = -49 \end{cases} \\ \hline 4a - 8b = -24 \end{array}$$

Saadaan uusi yhtälöpari:

$$\begin{cases} 3a - 3b = -15 & | \cdot (-4) \\ 4a - 8b = -24 & | \cdot 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -12a + 12b = 60 \\ 12a - 24b = -72 \end{cases} \\ \hline -12b = -12 \\ b = 1 \end{array}$$

Jos $b = 1$, niin
 $3a - 3 \cdot 1 = -15$

$$3a = -12 \quad | :3 \\ a = -4$$

Sijoitetaan yhtälöön $a + b + c = -5$
 $a = -4$ ja $b = 1$:

$$-4 + 1 + c = -5 \\ c = -2$$

Vastaus: $a = -4$, $b = 1$, $c = -2$

Teht 53a

53. a)

$$\begin{cases} -x + 3y + 4z = 2 \\ x + 2y + z = 1 \\ -2x + y + 4z = 1 \end{cases}$$

Muodostetaan kaksi yhtälöparia ja eliminoidaan niistä x .

$$\begin{array}{r} (1) \\ \begin{cases} -x + 3y + 4z = 2 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases} \\ \hline 5y + 5z = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (2) \\ \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ -2x + y + 4z = 1 \end{cases} \quad | \cdot 2 \\ \hline \begin{cases} 2x + 4y + 2z = 2 \\ -2x + y + 4z = 1 \end{cases} \\ \hline 5y + 6z = 3 \end{array}$$

Saadaan uusi yhtälöpari:

$$\begin{cases} 5y + 5z = 3 \\ 5y + 6z = 3 \end{cases} \quad | \cdot (-1)$$

$$+ \begin{cases} -5y - 5z = -3 \\ 5y + 6z = 3 \end{cases}$$

$$z = 0$$

Jos $z = 0$, niin

$$5y + 5 \cdot 0 = 3$$

$$5y = 3$$

$$y = \frac{3}{5} = 0,6$$

Kun $z = 0$ ja $y = 0,6$, niin

$$x + 2 \cdot 0,6 + 0 = 1$$

$$x + 1,2 = 1$$

$$x = 1 - 1,2 = -0,2$$

Vastaus: $x = -0,2$, $y = 0,6$, $z = 0$

[Aloitussivu](#)

[Tehtävä sivu](#)

$$\text{b)} \quad \begin{cases} 2x + y + 2z = 1 \\ 3x + y + 2z = 4 \\ -x + 6y + 4z = 1 \end{cases}$$

Muodostetaan kaksi yhtälöparia ja eliminoidaan z .

$$(1) \quad \begin{cases} 2x + y + 2z = 1 & | \cdot (-1) \\ 3x + y + 2z = 4 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} -2x - y - 2z = -1 \\ 3x + y + 2z = 4 \end{cases}$$

$$x = 3$$

$$(2) \quad \begin{cases} 3x + y + 2z = 4 & | \cdot (-2) \\ -x + 6y + 4z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6x - 2y - 4z = -8 \\ -x + 6y + 4z = 1 \end{cases}$$

$$-7x + 4y = -7$$

Saadaan uusi yhtälöpari:

$$\begin{cases} x = 3 \\ -7x + 4y = -7 \end{cases}$$

Sijoitetaan $x = 3$ yhtälöön $-x + 4y = -7$:

$$-7 \cdot 3 + 4y = -7$$

$$-21 + 4y = -7$$

$$4y = 14 \quad | :4$$

$$y = \frac{14}{4} = 3,5$$

Kun $x = 3$ ja $y = 3,5$, niin

$$2 \cdot 3 + 3,5 + 2z = 1$$

$$6 + 3,5 + 2z = 1$$

$$2z = -8,5 \quad | :2$$

$$z = -4,25$$

Vastaus: $x = 3$, $y = 3,5$, $z = -4,25$

Teht 53b

Teht 54

$$54. \begin{cases} 2x - 2y + 4z = 2 \\ 3x + y + 3z = 1 \\ -2x + 3y + 4z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -9x - 3y - 9z = -3 \\ -2x + 3y + 4z = 1 \end{cases}$$

$$-11x - 5z = -2$$

Muodostetaan kaksi yhtälöparia ja eliminoidaan niistä y .

Saadaan uusi yhtälöpari:

$$\begin{cases} 8x + 10z = 4 \\ -11x - 5z = -2 \end{cases} \quad | \cdot 2$$

$$(1) \begin{cases} 2x - 2y + 4z = 2 \\ 3x + y + 3z = 1 \end{cases} \quad | \cdot 2$$

$$\begin{cases} 8x + 10z = 4 \\ -22x - 10z = -4 \end{cases}$$

$$-14x = 0$$

Vastaus:

$$\begin{cases} 2x - 2y + 4z = 2 \\ 6x + 2y + 6z = 2 \end{cases}$$

$$8x + 10z = 4$$

$$x = 0$$

$$x = 0, y = -0,2, z = 0,4$$

Jos $x = 0$, niin

$$8 \cdot 0 + 10z = 4$$

$$10z = 4 \quad | :10$$

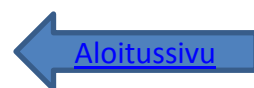
$$z = 0,4$$

$$(2) \begin{cases} 3x + y + 3z = 1 \\ -2x + 3y + 4z = 1 \end{cases} \quad | \cdot (-3)$$

Kun $x = 0$ ja $z = 0,4$, niin

$$3 \cdot 0 + y + 3 \cdot 0,4 = 1$$

$$y = 1 - 1,2 = -0,2$$



Teht 61

61.

	Markus	Timo	Pekka
Nyt	x	y	z
2 v. sitten	$x-2$	$y-2$	$z-2$

Saadaan yhtälöt:

$$\begin{cases} x + y + z = 99 \\ 2(z-2) = x-2 \\ y+7 = x \end{cases}$$

Sijoitetaan $y+7 = x$ kahteen muuhun yhtälöön.

$$\begin{cases} y+7 + y + z = 99 \\ 2z-4 = y+7-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y + z = 92 \\ -y + 2z = 9 \end{cases} \quad | \cdot 2$$

$$\begin{cases} 2y + z = 92 \\ + \quad -2y + 4z = 18 \end{cases}$$

$$5z = 110$$

$$z = 22$$

Jos $z = 22$, niin

$$-y + 2 \cdot 22 = 9$$

$$-y = -35 \quad | :(-1)$$

$$y = 35$$

Kun $y = 35$ ja $z = 22$, niin

$$x = 35 + 7 = 42$$

Vastaus: Markus 42 v.

Timo 35 v.

Pekka 22 v.



Kert t 13a

13. a)

$$\begin{cases} 3x - 5y + z = 5 \\ -2x + 5y + z = 5 \\ x - 10y + z = -4 \end{cases}$$

Muodostetaan kaksi yhtälöparia ja eliminoidaan niistä sama tuntematon y .

(1)

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 3x - 5y + z = 5 \\ -2x + 5y + z = 5 \end{cases} \\ + \\ \hline x + 2z = 10 \end{array}$$

(2)

$$\begin{cases} -2x + 5y + z = 5 \\ x - 10y + z = -4 \end{cases} \quad | \cdot 2$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -4x + 10y + 2z = 10 \\ x - 10y + z = -4 \end{cases} \\ + \\ \hline -3x + 3z = 6 \end{array}$$

Saadaan uusi yhtälöpari:

$$\begin{cases} x + 2z = 10 \\ -3x + 3z = 6 \end{cases} \quad | \cdot 3$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 3x + 6z = 30 \\ -3x + 3z = 6 \end{cases} \\ + \\ \hline 9z = 36 \\ z = 4 \end{array}$$

Kun $z = 4$, niin

$$x + 2 \cdot 4 = 10$$

$$x + 8 = 10$$

$$x = 2$$

Kun $z = 4$ ja $x = 2$, niin

$$2 - 10y + 4 = -4$$

$$-10y = -10 \quad | :(-10)$$

$$y = 1$$

b)

$$\begin{cases} -3x + 3z = 3 & \text{I} \\ -2y + 4z = -5 & \text{II} \\ -10x + 4y = -2 & \text{III} \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöstä I tuntematon x ja sijoitetaan se muihin yhtälöihin.

$$-3x + 3z = 3$$

$$-3x = -3z + 3 \quad | :(-3)$$

$$x = z - 1$$

Saadaan yhtälöpari:

$$\begin{cases} -2y + 4z = -5 \\ -10(z - 1) + 4y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2y + 4z = -5 \\ -10z + 10 + 4y = -2 \end{cases}$$

Kert teht 13b

$$\begin{cases} -2y + 4z = -5 & | \cdot 2 \\ 4y - 10z = -12 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} -4y + 8z = -10 \\ + \begin{cases} 4y - 10z = -12 \end{cases} \end{cases} \\ \hline & -2z = -22 \end{aligned}$$

$$-2z = -22$$

$$z = 11$$

Kun $z = 11$, niin

$$-2y + 4 \cdot 11 = -5$$

$$-2y = -49 \quad | :(-2)$$

$$y = 24\frac{1}{2}$$

Kun $z = 11$ ja $y = 24\frac{1}{2}$, niin

$$x = z - 1 = 11 - 1 = 10.$$

15. Paraabeli $y = ax^2 + bx + c$

$$\begin{array}{lcl} (-4, -64) & -64 = a \cdot (-4)^2 + b \cdot (-4) + c & \\ (-1, -4) & -4 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c & \\ (2, 2) & 2 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c & \end{array} \quad \begin{array}{l} (2) \\ \left\{ \begin{array}{l} a - b + c = -4 \\ 4a + 2b + c = 2 \end{array} \right. \quad | \cdot (-1) \end{array}$$

Saadaan yhtälöryhmä:

$$\left\{ \begin{array}{l} 16a - 4b + c = -64 \\ a - b + c = -4 \\ 4a + 2b + c = 2 \end{array} \right.$$

Muodostetaan kaksi yhtälöparia ja eliminoidaan niistä sama tuntematon c .

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} 16a - 4b + c = -64 \\ a - b + c = -4 \end{array} \right. \quad | \cdot (-1)$$

$$\begin{array}{r} \left\{ \begin{array}{l} -16a + 4b - c = 64 \\ a - b + c = -4 \end{array} \right. \\ + \\ \hline -15a + 3b = 60 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \left\{ \begin{array}{l} -a + b - c = 4 \\ 4a + 2b + c = 2 \end{array} \right. \\ + \\ \hline 3a + 3b = 6 \end{array}$$

Saadaan yhtälöpari:

$$\left\{ \begin{array}{l} -15a + 3b = 60 \\ 3a + 3b = 6 \end{array} \right. \quad | \cdot (-1)$$

$$\begin{array}{r} \left\{ \begin{array}{l} 15a - 3b = -60 \\ 3a + 3b = 6 \end{array} \right. \\ + \\ \hline 18a = -54 \\ a = -3 \end{array}$$

Kert teht 15

Kun $a = -3$, niin

$$3 \cdot (-3) + 3b = 6$$

$$-9 + 3b = 6$$

$$3b = 15 \quad | :3$$

$$b = 5$$

Kun $a = -3$ ja $b = 5$, niin

$$-3 - 5 + c = -4$$

$$-8 + c = -4$$

$$c = 4$$

Vastaus: $y = -3x^2 + 5x + 4$

Kert teht 16

16. Merkitään x = Sallan patukat (kpl)
 y = Annen patukat (kpl)
 z = Sirkan patukat (kpl)

Saadaan yhtälöt:

$$\begin{cases} x + y + z = 15 \\ x = 1,5z \\ x = y + 1 \end{cases}$$

Sijoitetaan $x = y + 1$ kahteen muuhun yhtälöön.

$$\begin{cases} y + 1 + y + z = 15 \\ y + 1 = 1,5z \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y + z = 14 \\ y - 1,5z = -1 \quad | \cdot (-2) \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 2y + z = 14 \\ -2y + 3z = 2 \end{cases} \\ \hline 4z = 16 \\ z = 4 \end{array}$$

Kun $z = 4$, niin
 $x = 1,5 \cdot 4 = 6$

Kun $x = 6$, niin
 $6 = y + 1$
 $y = 5$

Vastaus:
Salla 6 kpl, Anne 5 kpl ja Sirkka 4 kpl.