

1.2 Yhtälöparin ratkaiseminen laskemalla

Yhtälöpari ratkaistaan laskemalla käyttämällä eliminointi- tai sijoituskeinoa. Ratkaise yhtälöpari laskemalla

$$4x + 2y - 4 = 0 \text{ ja } y = 2x + 2$$

► Eliminointikeino

$$\begin{cases} 4x + 2y - 4 = 0 \\ -2x + y - 2 = 0 \mid *2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 2y - 4 = 0 \\ -4x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$4y - 8 = 0$$

$$4y = 8 \mid :4$$

$$y = 2$$

$$4x + 2y - 4 = 0$$

$$4x + 2*2 - 4 = 0$$

$$4x = 0 \mid :4$$

$$x = 0$$

Vastaus (0, 2)

► Sijoituskeino

$$4x + 2y - 4 = 0$$

$$4x + 2(2x+2) - 4 = 0$$

$$4x + 4x + 4 - 4 = 0$$

$$8x = 0 \mid :8$$

$$x = 0$$

$$y = 2x + 2$$

$$y = 2*0 + 2 = 2$$

Vastaus (0, 2)

Tehtävät

Kotitehtävät s 24-25

[19](#), [20](#), [21](#), [29](#), [31ab](#), [33](#), [34](#)

Lisätehtävät s 157...

[4](#), [5a](#), [5b](#), [6](#)

Teht 19

19. a)

$$\begin{array}{r} \left\{ \begin{array}{l} 3y + x = 5 \\ -3y - 5x = -1 \end{array} \right. \\ \hline -4x = 4 \\ x = -1 \end{array}$$

$$3y + x = 5, \text{ sij. } x = -1$$

$$3y - 1 = 5$$

$$3y = 6 \quad |:3$$

$$y = 2$$

b)

$$\begin{array}{r} \left\{ \begin{array}{l} y + 4x = 8 \\ -2y - 4x = -4 \end{array} \right. \\ \hline -y = 4 \\ y = -4 \end{array}$$

$$y + 4x = 8, \text{ sij. } y = -4$$

$$-4 + 4x = 8$$

$$4x = 12 \quad |:4$$

$$x = 3$$

Teht 20

$$20. \quad a) \quad \begin{cases} -3x - 2y = 1 & | \cdot 2 \\ 2x - 5y = 12 & | \cdot 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -6x - 4y = 2 \\ 6x - 15y = 36 \end{cases} \\ \hline -19y = 38 \\ y = -2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2x - 5y &= 12, \text{ sij. } y = -2 \\ 2x - 5 \cdot (-2) &= 12 \\ 2x &= 2 & | :2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

$$b) \quad \begin{cases} 2x + 4y = 30 & | \cdot 3 \\ 7x - 3y = 3 & | \cdot 4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 6x + 12y = 90 \\ 28x - 12y = 12 \end{cases} \\ \hline 34x = 102 \\ x = 3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2x + 4y &= 30, \text{ sij. } x = 3 \\ 2 \cdot 3 + 4y &= 30 \\ 4y &= 24 & | :4 \\ y &= 6 \end{aligned}$$

Teht 21

21. Muodostetaan yhtälöistä yhtälöpari.

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - 6y = 8 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

Sijoitetaan $y = x + 1$
yhtälöön $3x - 6y = 8$:

$$3x - 6(x + 1) = 0$$

$$3x - 6x - 6 = 0$$

$$-3x = 6 \quad | :(-3)$$

$$x = -2$$

$$y = x + 1, \text{ sij. } x = -2$$

$$y = -2 + 1 = -1$$

$$\text{b) } \begin{cases} 4x - y = 3 \\ y = x - 3 \end{cases}$$

Sijoitetaan $y = x - 3$
yhtälöön $4x - y = 3$:

$$4x - (x - 3) = 3$$

$$4x - x + 3 = 3$$

$$3x = 0 \quad | :3$$

$$x = 0$$

$$y = x - 3, \text{ sij. } x = 0$$

$$y = 0 - 3 = -3$$

29.

$$\begin{cases} 5(x+y) - 2(x-y) = 15 \\ 7(x+y) - 3(x-y) = 21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + 5y - 2x + 2y = 15 \\ 7x + 7y - 3x + 3y = 21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 7y = 15 & | \cdot (-4) \\ 4x + 10y = 2 & | \cdot 3 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} -12x - 28y = -60 \\ 12x + 30y = 63 \end{cases}$$

$$2y = 3$$

$$y = \frac{3}{2}$$

Teht 29

$$3x + 7y = 15, \text{ sij. } y = \frac{3}{2}$$

$$3x + 7 \cdot \frac{3}{2} = 15$$

$$3x + \frac{21}{2} = 15$$

$$3x = {}^2) 15 - \frac{21}{2}$$

$$3x = \frac{9}{2} \quad | :3$$

$$x = \frac{3}{2}$$

Teht 31ab

$$31. \quad a) \quad \begin{cases} 5x - 3y = 6 \\ -x + 2y = 3 \end{cases} \quad | \cdot 5$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 5x - 3y = 6 \\ -5x + 10y = 15 \end{cases} \\ \hline 7y = 21 \\ y = 3 \end{array}$$

$$-x + 2y = 3, \text{ sij. } y = 3$$

$$-x + 2 \cdot 3 = 3$$

$$-x + 6 = 3$$

$$-x = -3 \quad | :(-1)$$

$$x = 3$$

$$b) \quad \begin{cases} 7x + 5y = 3 & | \cdot (-2) \\ 3x + 2y = 3 & | \cdot 5 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -14x - 10y = -6 \\ 15x + 10y = 15 \end{cases} \\ \hline x = 9 \end{array}$$

$$3x + 2y = 3, \text{ sij. } x = 9$$

$$3 \cdot 9 + 2y = 3$$

$$27 + 2y = 3$$

$$2y = -24 \quad | :2$$

$$y = -12$$

Teht 33

$$33. \quad \begin{cases} 1999x - 1998y = 1 & | \cdot 2000 \\ 2000x - 1999y = 2 & | \cdot (-1999) \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} 3998000x - 3996000y = 2000 \\ -3998000x + 3996001y = -3998 \end{cases}$$

$$y = -1998$$

$$\begin{aligned} 2000x - 1999y &= 2, \text{ sijoitetaan } y = -1998 \\ 2000x - 1999 \cdot (-1998) &= 2 \\ 2000x + 3994002 &= 2 \\ 2000x &= -3994000 & | :2000 \\ x &= -1997 \end{aligned}$$

Vastaus: $x = -1997$, $y = -1998$

Teht 34

$$34. \begin{cases} 3(x+2) - 4(2-y) + 5x = 0 \\ 4 - 5x - 2(y-x) + 2x - y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 6 - 8 + 4y + 5x = 0 \\ 4 - 5x - 2y + 2x + 2x - y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x + 4y - 2 = 0 & | \cdot 3 \\ -x - 3y + 4 = 0 & | \cdot 8 & | \cdot 4 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad & \begin{cases} 8x + 4y - 2 = 0 \\ -8x - 24y + 32 = 0 \end{cases} \\ & \hline & -20y + 30 = 0 \\ & -20y = -30 \quad | :(-20) \\ & y = \frac{-30}{-20} = \frac{3}{2} = 1,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \begin{cases} 24x + 12y - 6 = 0 \\ -4x - 12y + 16 = 0 \end{cases} \\ & \hline & 20x + 10 = 0 \end{aligned}$$

$$20x = -10 \quad | :20$$

$$x = -\frac{10}{20} = -\frac{1}{2} = -0,5$$

Vastaus: $x = -0,5$; $y = 1,5$

Kert t 4

4. a)

$$\begin{array}{r} \left\{ \begin{array}{l} x + 5y = 0 \\ -x + 4y = 27 \end{array} \right. \\ \hline 9y = 27 \\ y = 3 \end{array}$$

$$x + 5 \cdot 3 = 0$$

$$x = -15$$

$$\text{b) } \begin{cases} -x + 2y = 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

Sijoitetaan $y = x + 1$ yhtälöön $-x + 2y = 1$

$$-x + 2(x + 1) = 1$$

$$-x + 2x + 2 = 1$$

$$x = -1$$

$$y = -1 + 1 = 0$$

Kert teht 5a

$$5. \quad a) \quad \begin{cases} 3x - y = 2 \\ -6x + 2y = -4 \end{cases} \quad | \cdot 2$$

$$+ \begin{cases} 6x - 2y = 4 \\ -6x + 2y = -4 \end{cases}$$

$$\hline 0 = 0$$

tosi

Perustelua vastaukselle... jotta ymmärtäisit miksi näin on... ei tarvitse perustella kokeessa

Kirjoitetaan yhtälöt ratkaistussa muodossa.

$$3x - y = 2$$

$$-6x + 2y = -4$$

$$-y = -3x + 2 \quad \text{ja} \quad 2y = 6x - 4 \quad | :2$$

$$y = 3x - 2$$

$$y = 3x - 2$$

Molemmat yhtälöt edustavat siis samaa suoraa ja kuvaajat menevät päällekkäin

Yhtälöparilla ääretön määrä ratkaisuja.

Leikkauspisteitä on siis ääretön määrä, mutta niiden on toteutettava suoran $y = 3x - 2$ yhtälö.

Kert teht 5b

$$b) \begin{cases} y = -x + 4 \\ y + x + 5 = 0 \end{cases}$$

Sijoitetaan $y = -x + 4$ yhtälöön

$$y + x + 5 = 0.$$

$$-x + 4 + x + 5 = 0$$

$$9 = 0$$

epätosi

Yhtälöparilla ei ole ratkaisua.

Perustelua vastaukselle... jotta ymmärtäisit miksi näin on... ei tarvitse perustella kokeessa

Ratkaistaan jälkimmäinen yhtälö y:n suhteen

$$y = -x - 5$$

Suorat ovat siis yhdensuuntaiset (x:n kertoimet ovat samat), mutta suorat keikkaavat y-akselin eri kohdissa. Suorat eivät siis voi leikata koskaan toisiaan. Ja yhtälöparin ratkaisuna ovat AINA ne pisteet, joissa suorat leikkaavat toisiaan. Siis 5a- kohdassa kaikki pisteet, 5b –kohdassa ei yhtään pistettä.

Kert t 6

$$\text{b) } \begin{cases} 5x + 4y = 3 & | \cdot (-4) \\ 4x + 5y = 3 & | \cdot 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -20x - 16y = -12 \\ 20x + 25y = 15 \end{cases}$$

$$9y = 3$$

$$y = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$4x + 5 \cdot \frac{1}{3} = 3$$

$$4x + \frac{5}{3} = 3$$

$$4x = 3 - \frac{5}{3}$$

$$4x = 1\frac{1}{3} \quad | :4$$

$$x = \frac{1}{3}$$

$$\text{6. a) } \begin{cases} 3x + 4y = -2 & | \cdot 5 \\ 5x + 3y = 4 & | \cdot (-3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15x + 20y = -10 \\ -15x - 9y = -12 \end{cases}$$

$$11y = -22$$

$$y = -2$$

$$3x + 4 \cdot (-2) = -2$$

$$3x - 8 = -2$$

$$3x = 6 \quad | :3$$

$$x = 2$$