El método de los elementos finitos

Segundo curso – Grado en Física

Índice

Método de los residuos ponderados

- Consideremos un problema de ejemplo

$$\frac{d^2u}{dx^2} - u + x = 0, 0 < x < 1 \tag{1}$$

con $u(0) = 0$ y $u(1) = 0$.

- Intentamos aproximar la solución mediante una *función de prueba* $\tilde{u}$ con un parámetro libre a

$$\tilde{u} = ax(1-x). \tag{2}$$

- Definamos el *residuo* R como

$$R(x) = \frac{d^2\tilde{u}}{dx^2} - \tilde{u} + x = -2a - ax(1-x) + x. \tag{3}$$

Método de los residuos ponderados

- Hallemos el valor de a que minimiza el residuo minimizando I_2

$$I_2 = \int_0^1 R^2(x)dx \tag{4}$$

- Para minimizar, hacemos

$$\frac{\partial I_2}{\partial a} = \int_0^1 R(x)\frac{\partial R(x)}{\partial a}dx = 0. \tag{5}$$

resultando $a = 0{,}2305$.

Método de los residuos ponderados

- El *método de residuos ponderados* se basan en resolver la ecuacion (o ecuaciones)

$$I = \int_0^1 w(x)R(x)dx = 0 \tag{6}$$

donde $w(x)$ se denomina *función de peso*. Con la elección $w = \partial R/\partial a$ recuperamos la ecuacion de minimización de R^2.

Método de los residuos ponderados

- Mejoremos la aproximación

$$\tilde{u} = a_1 \tilde{u}_1 + a_2 \tilde{u}_2, \tag{7}$$

con $\tilde{u}_1 = x(1-x)$, $\tilde{u}_1 = x^2(1-x)$.

- Entonces

$$R = a_1(-2 - x + x^2) + a_2(2 - 6x - x^2 + x^3) + x. \tag{8}$$

- Para minimizar la integral de R^2 la funciones peso son

$$w_1(x) = -2 - x + x^2; w_2(x) = 2 - 6x - x^2 + x^3. \tag{9}$$

- El *método de Galerkin* utiliza las mismas funciones como peso y prueba

$$w_1(x) = x(1-x); w_2(x) = x^2(1-x). \tag{10}$$

Formulación débil del método de los residuos ponderados

- La formulación que hemos visto del MRP exige evaluar

$$\int_0^1 w \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} dx.$$

- Esta formulación se denomina *formulación fuerte* del MRP. Exige que las funciones prueba deben ser derivables al menos dos veces.

Formulación débil del método de los residuos ponderados

- Integremos por partes la formulación fuerte

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 w\left(\frac{d^2\tilde{u}}{dx^2} - \tilde{u} + x)\right) dx \qquad (11) \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{dw}{dx}\frac{d\tilde{u}}{dx} - w\tilde{u} + xw\right) + \left[w\frac{d\tilde{u}}{dx}\right]_0^1 = 0. \qquad (12) \end{aligned}$$

- La segunda derivada ha desaparecido. A esta formulación se la denomina *formulación débil*.

Funciones de prueba continuas a trozos

- La precisión de las soluciones expuestas anteriormente depende fuertemente de las funciones prueba elegidas.
- La dependencia se hace aún más evidente cuando el dominio es bi o tri-dimensional, y/o las condiciones de contorno se complican.
- Una forma de abordar el problema consiste en usar funciones definidas en pequeños subdominios (*a trozos*).
- Ejemplo: funciones lineales a trozos

$$\phi_i(x) = \begin{cases} (x - x_{i-1})/(x_i - x_{i-1}) \text{ para } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ (x_{i+1} - x)/(x_{i+1} - x_i) \text{ para } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases} \quad (13)$$

Ejemplo

- Consideramos de nuevo el problema

$$\frac{d^2u}{dx^2} - u + x = 0, 0 < x < 1 \tag{14}$$

con $u(0) = 0$ y $u(1) = 0$.

- La formulación débil se escribe como

$$I = \int_0^1 \left(-\frac{dw}{dx}\frac{d\tilde{u}}{dx} - w\tilde{u} + xw \right) + \left[w\frac{d\tilde{u}}{dx} \right]_0^1 . \tag{15}$$

- Lo aplicamos a funciones definidas a trozos en $[0, 2/3]$, $[1/3, 1]$.

La formulación de elementos finitos de Galerkin

- Aumentando el número de funciones continuas a trozos, conseguimos aproximarnos más y más a la solución.
- Los subdominios en los que se definen las funciones continuas a trozos se denominan *elementos finitos*.
- En lo que sigue, consideraremos que las funciones peso y prueba coinciden (Galerkin).
- Resolvemos nuestro problema de ejemplo con más elementos.

La formulación variacional del Método de Elementos Finitos

- La formulación original del método de elementos finitos se basaba en la minimización de una funcional.
- Tomemos de nuevo nuestro caso de ejemplo

$$\frac{d^2u}{dx^2} - u + x = 0, 0 < x < 1 \tag{16}$$

con $u(0) = 0$ y $u(1) = 0$.

- Expresamos su *variación* al modificar u en una cantidad δu

$$\delta J = \int_0^1 \left(-\frac{d^2u}{dx^2} + u - x \right) \delta u dx + \left[\frac{du}{dx} \delta u \right]_0^1 . \tag{17}$$

La formulación variacional del Método de Elementos Finitos

- Realizamos una integración por partes (y suponiendo por sencillez condiciones de contorno de Neumann)

$$\delta J = \int_0^1 \left(\frac{du}{dx}\frac{d(\delta u)}{dx} + u\delta u - x\delta u \right) dx. \tag{18}$$

- Puesto que el operador variacional conmuta con la derivación y con la integral

$$\delta J = \delta \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{d(\delta u)}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2}u^2 - xu \right\} dx. \tag{19}$$

La formulación variacional del Método de Elementos Finitos

- La minimización de la funcional

$$J = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} u^2 - xu \right\} dx, \tag{20}$$

  es equivalente a las ecuaciones diferenciales de partida.
- El método de elementos finitos original se basaba en minimizar la funcional para funciones test de la forma

$$u(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i w(x).$$

- Esta formulación se denomina método de *Rayleigh-Ritz*.
- Para su resolución, se obtiene el mismo sistema de ecuaciones que hemos encontrado en la formulaciones anteriores.

Ejemplo-resumen

Formula las ecuaciones algebraicas que aproximan la solución del problema

$$\frac{d^2u}{dx^2} - u + x = 0, 0 < x < 1 \tag{21}$$

con condiciones de contorno $u(0) = 0$ y $u(1) = 0$, utilizando el método de elementos finitos de Galerkin, con n funciones peso definidas a trozos (en las regiones $x_i < x < x_{i+1}$ con $x_i = (i-1)/(n-1)$).

Formulación débil de la ecuación de Poisson

.

- Consideremos la ecuación de Poisson

$$\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \phi) = -\rho, \tag{22}$$

definida en el dominio limitado por el contorno $S = S_1 \cup S_2$, con las condiciones de contorno:

$$\phi = \phi_0 \text{ en } S_1, \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = f \text{ en } S_2. \tag{23}$$

- Su formulación débil viene dada por

$$\int_\tau d\tau\, \varepsilon \nabla \phi \cdot \nabla \Psi = \int_\tau d\tau\, \rho \Psi + \int_{S_2} \varepsilon f \Psi \tag{24}$$

para toda función Ψ definida en τ y tal que $\Psi = 0$ en S_1.

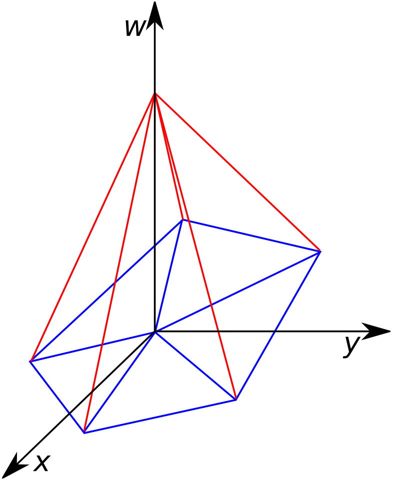
Discretizado del dominio espacial

- El método de elementos aplica la formulación débil de la ecuación de Poisson en un espacio *discretizado*.
- En elementos finitos es habitual discritezar el espacio en regiones *triangulares*.
- La discretización puede ser muy compleja y es realizada por medio de *rutinas de mallado* que pueden ser muy complejas.
- El método de elementos finitos presenta gran flexibilidad para tratar con dominios de formas complejas.
- En *Matlab*, entremos en la *PDEToolBox* y experimentemos con los mallados.

Funciones prueba

Las funciones de prueba se definen en torno a cada *vértice* de la malla, de forma que valgan 1 en un cierto vértice y 0 en todos los demás, con variación lineal

$$w_i(a_j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j = i \\ 0 & \text{si} \quad j \neq i \end{cases} \qquad (25)$$



Solución por elementos finitos

- Se busca una solución de la forma

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{n_0} \phi_j w_j(\mathbf{r}) + \sum_{j=n_0+1}^{n} \phi_0 w_j(\mathbf{r}) \tag{26}$$

- Imponemos que cumpla la ecuación integral

$$\sum_{j=1}^{n_0} K_{ij}\phi_j = B_i \quad i = 1, \ldots, n_0 \text{ donde} \tag{27}$$

$$K_{ij} = \int_\tau d\tau\, \varepsilon \nabla w_i \cdot \nabla w_j \tag{28}$$

$$B_i = \int_\tau d\tau\, \rho w_i + \int_{S_i} dS\, \varepsilon f w_i - \sum_{j=n_0+1}^{n} \int_\tau d\tau\, \phi_0 \varepsilon \nabla w_j \cdot \nabla w_i$$

Comentarios adicionales

- La ecuación diferencial de partida se aproxima por un sistema de ecuaciones algebraicas.
- El sistema de ecuaciones lineales suele ser de dimensión alta pero *disperso*.
- Existen numerosos *software* de elementos finitos con interfaces amigables.
- Dentro de Matlab, se tiene la *PDEToolBox*.

Bibliografía

- Carlos A. Felippa, *Introduction to Finite Element Methods*. Department of Aerospace Engineering Sciences University of Colorado at Boulder. Disponible en `http://www.colorado.edu/engineering/cas/courses.d/IFEM.d/`.
- Vídeos de demostración de COMSOL `http://www.comsol.com/products/tutorials/`.
- Software de código abierto *Elmer* `http://www.csc.fi/english/pages/elmer`.