MATERIALES DIDÁCTICOS

I N S U M A

APRENDIENDO A DESPEJAR

LUIS QUINTANAR MEDINA*

Ejercitaremos el despeje en ecuaciones de primer grado y lo haremos a tres niveles:
El primero en que solo se consideran expresiones directas, la habilidad que se desarrolla es el despeje en expresiones del tipo, en donde a y b son números dados; el segundo nivel, en donde las expresiones que involucran a la incógnita son mas complicadas, y el tercero, en donde se comentan las ideas de lo que se hizo en los dos niveles anteriores.
Se recomienda que se realicen todas las actividades sugeridas ya que la ejercitación es el único camino cierto para dominar el despeje de incógnitas.

* pkom2002@hotmail.com

ECUACIONES E INCÓGNITAS

UNA ECUACIÓN
Es una igualdad entre expresiones algebraicas.

Un ejemplo de una **EXPRESIÓN ALGEBRAICA** es

$$2x+3,$$

Entonces una ecuación puede ser

$$2x+3=7x$$

para las expresiones 2x+3 y 7x
o también 7-x=2 para las expresiones 7-x y 2.
La letra x (u otra letra, generalmente las últimas del alfabeto, x, y z), representa un numero cualquiera y es la llamada **incógnita,** que es lo que se desea conocer en la ecuación dada.

Aunque no se conoce el valor de x, no debe ser un problema el trabajar con estas expresiones; en el ultimo ejemplo, 7-x=2, si se sabe que, si al número 7 le restamos el numero x, obtendremos el numero 2.
Entonces, lo que deseamos, una vez que identificamos la ecuación, es **CONOCER** el valor de x que hace que la igualdad entre las expresiones se cumpla; a esto se le llama **RESOLVER** LA ECUACIÓN.

ACTIVIDADES
Señala las ecuaciones en la siguiente lista

3x+6	$\frac{25y}{17}+y^3-6$
5-y=-2	$-5x^4+8=-4-\frac{3}{4x}$
3x-4=6+5x	$\sqrt{x}-33+x^2$
X^3-5x^2+3x-2	$12-y+32-y^3=7y-63$
0=33-y+12	2x-5=9x

DESPEJAR
Para conocer el valor de la incógnita es necesario "despejarla" en la ecuación, o sea, dejarla sola.
En 3x=6 sabemos que x=2 porque 3 por 2 es 6, pero ¿cómo obtenemos x?, ¿cómo la despejamos?

LAS REGLAS
Para despejar a la incógnita en una ecuación, las reglas o leyes que se utilizan son las **operaciones** muy conocidas de SUMA, RESTA, MULTIPLICACIÓN y DIVISIÓN de números y algunas **propiedades** de los números; las veremos a continuación.

NIVEL 1

1. MULTIPLICACIÓN-DIVISION

POR EJEMPLO...
Si la ecuación es 3x=6
Para despejar a x, debemos quitar el 3 que la multiplica.
Si multiplicamos la expresión 3x por 1/3 entonces (1/3)(3x)=x. Aquí hemos usado la

> **PROPIEDAD: Inverso multiplicativo de un numero real** a
> $(a)(\frac{1}{a})$=1, siempre que a sea diferente de cero
> Se dice que a es el **inverso multiplicativo** de 1/a y 1/a es el inverso multiplicativo de a

¡OJO! Para mantener la igualdad de la ecuación original, entre las dos expresiones, se debe multiplicar también a 6 por 1/3, quedando 6/3, entonces se cumple

x=2

con lo cual, hemos despejado x y obtenido el valor que hace que se cumpla la ecuación original.
Lo mismo se puede usar si se tiene, por ejemplo,

$$\frac{x}{5} = 6$$

Aquí se usa la propiedad del inverso multiplicativo para eliminar al numero 5, en realidad, al numero 1/5, ya que (1/5)x=x/5
Entonces multiplicaremos a la expresión x/5 por 5 ya que (1/5)(5)=1.
Se tendrá 5(x/5)=x; no olvidar que se debe multiplicar también al 6 de la ecuación original: se tendrá entonces:

x=30

Si tenemos una ecuación como –3x=10, se deberá quitar el numero –3, multiplicando ambos miembros por el inverso multiplicativo de –3 que es –1/3 (**NOTA** en el caso de tener –y, recordar que –y significa (–1)(y) y entonces eliminar el signo menos significa multiplicar por el inverso multiplicativo de –1, que es el mismo -1)
Una variante de lo anterior se muestra en el siguiente caso:

$$\frac{3x}{4}=8,$$

en donde se debe recordar que
$\frac{3x}{4} = (\frac{3}{4})x$, y en general:

$$\boxed{\frac{ax}{b} = (\frac{a}{b})x}$$

y entonces, se despeja x multiplicando por el inverso multiplicativo de a/b, que es b/a

ACTIVIDADES
Despeja la incógnita en cada caso, usando a) la propiedad del inverso multiplicativo y b) aplicando la misma operación básica (suma, resta, multiplicación o división) a los dos miembros de la ecuación.

2x=60	$\frac{6z}{7}=11$
12=-3y	-2z=40
-y=77	$-\sqrt{3}=z\sqrt{3}$
$\frac{y}{-3}=1$	$\frac{3}{5}=\frac{6x}{5}$

2. SUMA-RESTA

Si tenemos x+2=0, ahora deberemos quitar el numero 2 a x, pero no esta multiplicando a x, sino sumando; esto se logra si a la expresión x+2 le sumamos el numero -2; se usa entonces la

PROPIEDAD: Inverso aditivo de un numero

a+(-a)=0

y se dice que a es el **inverso aditivo** de –a o que –a es el inverso aditivo de a

Al igual que en los casos anteriores, debemos de sumar -2 al miembro derecho; entonces tendremos:

x=-2

Otro ejemplo:
Si x-6=7, sumando el numero 6 (inverso aditivo de –6)a ambos miembros, se tiene

x=13

Si tenemos 9-y=4, podemos sumar el inverso aditivo de –y para obtener

9=4+y

ahora, sumando el inverso aditivo de 4:

y=5

ACTIVIDADES
Obtener la solución de las siguientes ecuaciones:

-6+y=13	$\sqrt{6}-z=6$
-3-x=-8	$\frac{3}{4}=2-y$
-9=6+z	3π+y=-7
13=x-8	$3\sqrt{2}=\frac{3}{5}+z$

. SUMA-RESTA y MULTIPLICACIÓN-DIVISION

Los casos como $3x-2=6$ son ahora fáciles de atacar:
La expresión $3x-2$ consta de los sumandos $3x$ y –2:
Si primero quitamos el –2, usando suma-resta y después el 3 que esta multiplicando a la incógnita, usando multiplicación-división, entonces x queda despejada; una vez mas recordemos que las mismas operaciones que se hagan en el miembro izquierdo se debe de hacer en el miembro derecho de la ecuación.

Ejemplo:
Resolver $6-5x=8$

OJO debemos tener claro que $6-5x$ **NO SIGNIFICA QUE** a 6 se le reste 5 y lo que quede multiplique a; esto ultimo se escribiría $(6-5)x$.

Eliminamos al numero 6 sumando –6, quedando

$$-5x=2$$

pues en el miembro derecho hicimos 8-6=2.
El siguiente paso es multiplicar por –1/5 ambos miembros y se tiene

$$x=-2/5.$$

ACTIVIDADES

Resolver las siguientes ecuaciones

2y-8=9	3-6z=-7
$(\frac{2}{5})x-5=-4$	35=7- $\frac{y}{3}$
$\frac{4z}{7}+7=-6$	$\sqrt{5}x-4=\sqrt{5}$
33= $\sqrt{2}z-12$	12=-45-6z

HABILIDAD que se desarrolla:
Despejar la incógnita z de expresiones como

$$az+b=0$$

en donde a y b representan números dados

NIVEL 2

Ahora trataremos la variante de lo visto en el nivel, que consiste en tener la incógnita en los dos miembros.

a) Si se tiene

$$3x-2=3-2x,$$

se trata de lograr que la incógnita aparezca en el mismo miembro, usando las mismas reglas ya vistas anteriormente: por ejemplo, si queremos que x este en el miembro izquierdo, sumaremos el numero 2x a ambos miembros:

$$3x-2+2x=3-2x+2x$$

se tendrá

$$5x-2=3$$

y ya está en una de las formas vistas antes.
Si queremos que x aparezca en el miembro derecho, sumamos –3x a ambos miembros y tendremos:

$$-2=3-5x$$

la cual ya se puede trabajar como antes.
b) Si la incógnita esta como denominador:

$$\frac{3}{y}=8$$

Trataremos de que y aparezca como numerador (y lo trabajaremos como los casos anteriores), usando las reglas conocidas.
(**NOTA**: y no puede ser cero pues esta como denominador)
Multiplicando ambos miembros por y, se tiene, usando la propiedad del inverso multiplicativo,

$$3=8y$$

que es uno de los casos ya vistos
c) Si z aparece en los dos miembros, como denominador

$$\frac{3}{z}=-\frac{7}{1-z}$$

Debemos de quitar a z como denominador (**NOTA**: z no puede ser 1).
Si multiplicamos ambos miembros por z tendremos

$$3=\frac{7z}{1-z}$$

Ahora multiplicamos ambos miembros por 1-z

$$3(1-z)=7z$$

o sea,

$$3-3z=7z$$

y ya se puede trabajar como en casos anteriores.

ACTIVIDADES

Resuelve las siguientes ecuaciones

-2+5z=33+6z	$\frac{2}{y-4}=9$
$\frac{4x}{3}=66-12x$	$\frac{9}{4-z}=\frac{6}{z}$
y-75+2y=24+y	88+y=2y-7

$\frac{3}{5x}=16$	$\frac{8}{x-2}=\frac{6}{3x-1}$

HABILIDAD que se desarrolla Despejar la incógnita cuando las dos expresiones que se igualan la contienen y también cuando la incógnita se encuentra en el denominador.

NIVEL 3

Los números reales

Los números a los que se refieren las expresiones y operaciones vistas anteriormente son los números reales.

Los reales incluyen a los números

	Ejemplos
Naturales	1,2,3...
Enteros	...-2, -1, 0, +1 ,+2...
Racionales	$-\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{15}{30},$ Etc., el denominador diferente de 0
Irracionales	$\pi,\sqrt{2},\sqrt{5},$ Etc.

Propiedades de los reales

Entre las propiedades importantes que se usan en los despejes están:

1. Si x es un real diferente de cero, existe un numero y tal que $xy=1$, siendo y el inverso multiplicativo de x y el numero 1 se llama el **neutro multiplicativo**.

ACTIVIDADES

Escriba el inverso multiplicativo de los siguientes números:

3	109-x
-5	$\frac{17}{4}$
$-\frac{1}{5}$	$\frac{x}{6}$
π	-66
$\frac{2}{a}$	$\frac{1}{2-x}$

2. Si x es un real existe un numero y tal que $x + y = 0$, siendo y el inverso aditivo de x y al numera 0 se le llama el **neutro aditivo**.

ACTIVIDADES

Obtener los inversos aditivos de los siguientes números reales

77	$\frac{z}{2}+5$
-34	-x
2-x	y+75
$\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{7}$

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Una expresión algebraica consta de una letra o literal, que simboliza a un numero (real); esta literal esta elevada a una potencia. Si solo aparece por ejemplo la letra x, la potencia a la que se encuentra elevada es 1 y no cero. Si una literal se encuentra elevada a la potencia cero, su valor es 1, es decir:

$$\boxed{x^0=1}$$

$$\boxed{x^1 = x}$$

Además de la literal y su exponente, la expresión algebraica lleva un coeficiente numérico (con su correspondiente signo).

Ejemplos: x^3, $2z^7$, $-37y^8$, $\frac{3}{7}x^5$, etc.

OJO El numero 3, por ejemplo, es una expresión algebraica ya que $3=+3x^0$, o sea que cualquier numero se puede considerar como una expresión algebraica.

ACTIVIDADES

1. Escriba cinco expresiones algebraicas
2. Escriba tres sumas de expresiones algebraicas, cada una con dos sumandos
3. Exprese que dos de las sumas anteriores son iguales

ECUACIONES

La expresión 6x+4 puede tomar muchos valores, por ejemplo, si x toma los valores 1, 3.5, 10, los valores de la expresión son, respectivamente, 10, 22 y 64 mientras que la expresión $-2x$, para estos mismos valores de x toma los valores –2, -6 y –20.

Si escribimos $6x+4=-2x$, se esta expresando que se tiene una igualdad entre las dos expresiones, la cual se cumple solo para ciertos valores de la incógnita, pues, como vimos, por ejemplo para x=3, no se cumple la igualdad.
Precisamente, el objetivo de despejar es determinar los valores de la incógnita para los que si se cumple la igualdad.

ACTIVIDADES

a) Determina los valores que toman las siguientes expresiones

$$4-7z \text{ y } 2-z$$

para los valores de z: -1,5,12
b) Determina para que valor o vales de la incógnita se cumple la igualdad de las dos expresiones.